پینوکیو در دهکدهٔ عجایب

مقداد قاری، شراره تقی‌دستجردی

در چهار قســمت قبل خواندیم، پینوکیو که وارد دهکدهٔ عجایب شده بود، توانست به کمک راهنمایی‌های فرشــتهٔ مهربان، چهار معمای منطقی را حل کنــد. معماهای منطقی دهکدهٔ عجایب از ویژگی‌های عجیب ســاکنان این دهکده به وجود می‌آمدنــد. چرا که اهالی دهکده یا همیشه دروغ می‌گفتند یا همیشه راست، و نه هر دو. پینوکیو هر بار باید تعیین می‌کرد که هر یک از افرادی که می‌بیند از چه نوعی هستند: راست‌گو یا دروغ‌گو.

دیدیم پینوکیو در معمای چهارم با دو خواهر همســان روبه‌رو شد. او با خودش فکر کرده بود: آیا دوقلوهای دهکدهٔ عجایب از یک نوع هستند یا نه؟ او پس از تحلیل جملهٔ یکی از خواهرها فهمید، هر دوی آن‌ها راست‌گو هستند. بنابراین حدس زد دوقلوهای دهکدهٔ عجایب از یک نوع هستند. برای اینکه حدس خود را بررسی کند، در دهکده گشتی زد تا یک دوقلوی دیگر پیدا کند. پس از مدتی، دو برادر نوجوان همسان دید که یکی از آن‌ها دستکش پوشیده بود و دیگری نه.

پینوکیو: ســلام پســران نوجوان. روزتان به خیر. ســؤالی دارم. می‌خواهم بدانم کدام‌یک از شما راست‌گو و کدام‌یک دروغ‌گو هستید؟

پسر دستکش‌پوش: ما هر دو از یک نوع هستیم.

چشمان پینوکیو برقی زد. از اینکه حدسش درست بود، خوش‌حال شد. اما یکباره یادش افتاد که در دهکدهٔ عجایب است و به فکر فرو رفت. پینوکیو با خود گفت: «اگر این پسر دروغ‌گو باشد، چه می‌شود؟» پیش از اینکه پینوکیو به خود بیاید، برادران همسان از آنجا رفته بودند. پس بار دیگر دفترچهٔ یادداشــتش را باز کرد و مشغول بررسی تمام حالت‌ها شد.

پسر دستکش‌پوش	برادر پسر دستکش‌پوش	نوع گزاره «پسر دستکش‌پوش و برادرش از یک نوع هستند»
راست‌گو	راست‌گو	راست
راست‌گو	دروغ‌گو	دروغ
دروغ‌گو	راست‌گو	دروغ
دروغ‌گو	دروغ‌گو	راست

جدول ۱

پینوکیو با کمی تأمل در جدول ۱، توانست معمای پنجم را نیز حل کنــد. او از اینکه از عهدهٔ حل این معما برآمده بود، بسیار شادمان بود، اما هنوز نمی‌دانست آیا حدسش در مورد یک نوع بودن همسان‌ها درست است یا نه.

ادامه دارد...

➢ با توجه به جدول ۱، مشخص کنید در مورد نوع هر یک از این دو پسر چه می‌توان گفت؟

➢ به نظر شما چرا پینوکیو هنوز در مورد اینکه حدسش درست است یا نه، مطمئن نبود؟

در داستان قبل با گزاره‌های شرطی که نوع مهمی از گزاره‌های مرکب هستند، آشنا شدید. شاید برایتان عجیب باشد، اما گزاره‌ای که پینوکیو در این داستان تحلیل کرد نیز به نحوی به گزاره‌های شرطی مربوط است. برای اینکه این ارتباط را دریابید، اجازه دهید معنای گزارهٔ پسر دستکش‌پوش را با دقت بررسی کنیم. گزارهٔ «ما هر دو از یک نوع هستیم» در واقع به این معناست که «اگر من راست‌گو باشم، برادرم هم راست‌گوست و اگر من دروغ‌گو باشم، برادرم هم دروغ‌گوست.»

به عبارت دیگر، گزارهٔ «A و B از یک نوع هستند»، از ترکیب عطفی دو گزارهٔ شرطی به‌دست آمده است:

$(A\to B)\wedge(\sim A\to\sim B)$

پس به کمک جدول ارزش گزاره‌های شرطی هم می‌توانیم به جدولی که پینوکیو در معمای پنجم رسید، دست پیدا کنیم. جدول ۲ کار بررسی شما را آسان می‌کند.

$V(A)$	$V(B)$	$V(A\to B)$	$V(\sim A)$	$V(\sim B)$	$V(\sim A\to\sim B)$	$V((A\to B)\wedge(\sim A\to\sim B))$
۱	۱					
۱	۰					
۰	۱					
۰	۰					

جدول ۲

پس از تکمیل جدول ۲ خواهید دید، ستون آخر جدول همان ارزش‌هایی را نشان می‌دهد که پینوکیو در ستون آخر جدولش به دست آورده بود.

➢ در منطق، گزارهٔ $(A\to B)\wedge(\sim A\to\sim B)$ را به صورت $A\leftrightarrow B$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم «A اگر و تنها اگر B». به این ترتیب گزارهٔ پسر دستکش‌پوش چنین است: «من راست‌گو هستم، اگر و تنها اگر برادرم راست‌گو باشد.» به نظر شما آیا می‌توان گفت گزارهٔ پسر دستکش‌پوش به این معناست که: «من دروغ‌گو هستم اگر و تنها اگر برادرم دروغ‌گو باشد؟ چرا؟

➢ با توجه به اصول دهکدهٔ عجایب (که راست‌گوها همیشه راست می‌گویند و دروغ‌گوها همیشه دروغ و نه هر دو) قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیه: برای هر گزارهٔ p، اگر یکی از اهالی بگوید که من راست‌گو هستم، اگر و تنها اگر p، در این‌صورت گزارهٔ p درست است (صرف نظر از اینکه این شخص راست‌گوست یا دروغ‌گو).

یک رابطهٔ ریاضی برای بیان ارتباط $V(p)$ و $V(q)$ با $V(p\leftrightarrow q)$ پیدا کنید.

شاید به نظرتان آمده باشد که نمادگذاری گزارهٔ $A\leftrightarrow B$ به جای اینکه معنای $(A\to B)\wedge(\sim A\to\sim B)$ را به ذهن بیاورد، باید به معنای $(A\to B)\wedge(B\to A)$ باشد.

اجازه دهید با جدول ارزش گزاره‌ها (جدول ۳) این موضوع را بررسی کنیم. برای این کار کافی است بررسی کنیم در جدول ارزش‌ها، عددهای ستون مربوط به $\sim A\to\sim B$ با عددهای ستون مربوط به $B\to A$ دقیقاً یکی است. اگر این اتفاق بیفتد، می‌گوییم دو گزاره هم ارز یا معادل هستند و می‌نویسیم: $(B\to A)\equiv(\sim A\to\sim B)$.

منطق‌دان‌ها هم‌ارزی $(B\to A)\equiv(\sim A\to\sim B)$ را «قانون **عکس نقیض**» می‌نامند.

➢ جدول ارزش‌های (جدول ۳) زیر را پر کنید:

$V(B)$	$V(A)$	$V(B\to A)$	$V(\sim A)$	$V(\sim B)$	$V(\sim A\to\sim B)$
۱	۱				
۱	۰				
۰	۱				
۰	۰				

جدول ۳

➢ هم‌ارزی $B\to A$ و $\sim A\to\sim B$ در اثبات درستی بسیاری از گزاره‌های شرطی کاربرد دارد. آیا می‌توانید مثالی بیاورید که به جای اثبات درستی $B\to A$، اثبات درستی $\sim A\to\sim B$ آسان‌تر باشد؟

➢ به کمک جدول ارزش‌های زیر (جدول ۴) بررسی کنید: آیا دو گزارهٔ $A\to B$ و $B\to A$ هم‌ارز هستند؟

$V(A)$	$V(B)$	$V(A\to B)$	$V(B\to A)$
۱	۱		
۱	۰		
۰	۱		
۰	۰		

جدول ۴

➢ مثالی از دو گزاره بیاورید که اولی، دومی را نتیجه دهد، ولی دومی، اولی را نتیجه ندهد.

➢ چرا از $(B\to A)\equiv(\sim A\to\sim B)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$(A\to B)\wedge(\sim A\to\sim B)\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)$$